方程：

1. 求微分方程 $y'=xy$， $y(0)=1$ 的特解

2. 求微分方程 $y''-2y'+y=(x^2+2)e^x$ 的通解。

级数

1. 函数 $f(x)=e^{3x}$ 的麦克劳林级数为_____

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$ 是以 2π 为周期的周期函数，其傅立叶级数的和函数记为 $S(x)$，则 $S(36\pi)=$_____

3. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^{2n}}{2^n}$ 的收敛域为_____

4. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n}$ 的收敛域及和函数。

5. 设 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\le\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$， $(n=1,2,3,\quad,a_n>0,b_n>0)$，证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛。

多元微分：

1. 函数 $z=y^x$ 在点 $(1,2)$ 处的梯度 $\mathbf{grad}z=$_____

2. 求曲面 $xy+e^z=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程。

3. 设方程 $F(x-2z,y-3z)=0$ 确定了函数 $z=z(x,y)$，证明：

$$2\frac{\partial z}{\partial x}+3\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

4. 求函数 $f(x,y)=3xy-x^3-y^3$ 的极值。

重积分

1. 求由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围立体的体积

2. 设 $D: x^2+y^2\le 1$，则二重积分 $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ _____

线面积分

1. 曲线 L 为 $\boldsymbol{x^2+y^2=1}$，求曲线积分 $\int\limits_L \sqrt{\boldsymbol{x^2+y^2}}\boldsymbol{ds}$

2. 计算曲线积分 $\boldsymbol{I=\int\limits_L (2xe^y+1)dx+(x^2e^y+2x)dy}$，$L$ 是 $\boldsymbol{(x-1)^2+y^2=1}$ 上半圆周逆时针方向。

3. 设 Σ 为球面 $\boldsymbol{x^2+y^2+z^2=a^2}$，求曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{(z+1)dS}$

4. 计算曲面积分 $\boldsymbol{I=\iint\limits_{\Sigma}(z^2-1)dxdy+x(y^2-2z)dydz+x^2ydzdx}$，其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2\,(0\le z\le 1)$ 的上侧。

方程：

1. 求微分方程 $y'=xy$， $y(0)=1$ 的特解

解：分离变量 $\frac{dy}{y}=xdx \Rightarrow \ln y=\frac{1}{2}x^2+C_1$ 即 $y=Ce^{\frac{x^2}{2}}$.

代入初值条件 $y(0)=1$，有 $1=Ce^0 \Rightarrow C=1$.

故特解为 $y=e^{\frac{x^2}{2}}$

2. 求微分方程 $y''-2y'+y=(x^2+2)e^x$ 的通解。

解：①求齐次微分方程的通解.

特征多项式 $\varphi(r)=r^2-2r+1$. 特征根 $r_{1,2}=1$

齐次方程的通解为 $Y=(C_1+C_2x)e^x$.

②求非齐次微分方程的特解.

设 $y^*=x^2(Ax^2+Bx+C)e^x=Q(x)e^x$. （$\lambda=1$ 是特征重根）

代入公式 $Q''(x)+\varphi'(\lambda)Q'(x)+\varphi(\lambda)Q(x)=P_m(x)$ 得

$Q''(x)=x^2+2$

$12Ax^2+6Bx+2C=x^2+2$

$\Rightarrow A=\frac{1}{12}$, $C=1$, $B=0$.

$\therefore y^*=(\frac{1}{12}x^4+x^2)e^x$

③非齐次微分方程的通解 $y=Y+y^*=(\frac{1}{12}x^4+x^2+C_1+C_2x)e^x$.

级数

1. 函数 $f(x)=e^{3x}$ 的麦克劳林级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(3x)^n$, $x\in(-\infty,+\infty)$

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$ 是以 2π 为周期的周期函数，其傅立叶级数的和函数记为 $S(x)$，则 $S(36\pi)=$ 0

3. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{2n}}{2^n}$ 的收敛域为 $(-\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}-1)$

4. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}$ 的收敛域及和函数。

解：(1) $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1$，$R=1$.

$x=-1$ 时，原级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收敛. $x=1$ 时，原级数发散.

∴ 收敛域为 $[-1,\ 1)$.

(2) 设幂级数的和函数为 $S(x)$. 令 $g(x)=\frac{S(x)}{x}$，则 $g(0)=0$.

$g'(x)=\left(\frac{S(x)}{x}\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$ $\quad x\in[-1,\ 1)$.

$\int_0^x g'(x)dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx$ $\quad g(x)=-\ln(1-x)\Big|_0^x=-\ln(1-x)$

故 $S(x)=-x\ln(1-x)$，$[-1,1)$

5. 设 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}$，$(n=1,2,3,\cdots,a_n>0,b_n>0)$，证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛。

由已知 $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\le\frac{a_n}{b_n}\le\cdots\le\frac{a_1}{b_1}$.

$\Rightarrow\ 0\le a_n\le b_n\cdot\frac{a_1}{b_1}$ $\quad\frac{a_1}{b_1}$ 为非零常数.

由比较判敛法，若 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

多元微分：

1. 函数 $z = y^x$ 在点 (1,2) 处的梯度 **gradz** = ~~[illegible]~~ $(2\ln 2, 1)$

2. 求曲面 $xy + e^z = 3$ 在点 **(1,2,0)** 处的切平面方程。

解：$F(x,y,z) = xy + e^z - 3$.

$F'_x|_{(1,2,0)} = 2$, $F'_y|_{(1,2,0)} = 1$, $F'_z|_{(1,2,0)} = 1$.

所求切平面方程为 $2(x-1) + (y-2) + z = 0$

$\Rightarrow 2x + y + z = 4$.

3. 设方程 $F(x-2z, y-3z) = 0$ 确定了函数 $z = z(x,y)$，证明：

$$2\frac{\partial z}{\partial x} + 3\frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

解：$F'_x = F'_1$, $F'_y = F'_2$, $F'_z = -2F'_1 - 3F'_2$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{F'_1}{2F'_1 + 3F'_2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{F'_2}{2F'_1 + 3F'_2}$$

$$2\frac{\partial z}{\partial x} + 3\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2F'_1 + 3F'_2}{2F'_1 + 3F'_2} = 1.$$

原式得证.

4. 求函数 $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$ 的极值。

解：① 求驻点：

令 $\begin{cases} f'_x = 3y - 3x^2 = 0 \\ f'_y = 3x - 3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$

② $f''_{xx} = -6x$, $f''_{xy} = 3$, $f''_{yy} = -6y$.

③ 在点 (0,0) 处，$A = 0$, $B = 3$, $C = 0$.

$AC - B^2 = -9 < 0$.

故 $f(x,y)$ 在 (0,0) 处无极值.

在 (1,1) 点处，$A = -6$, $B = 3$, $C = -6$.

$AC - B^2 = 27 > 0$, 且 $A = -6 < 0$.

故 $f(x,y)$ 在 (1,1) 有极大值，即 $f(1,1) = 1$.

重积分

1. 求由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围立体的体积

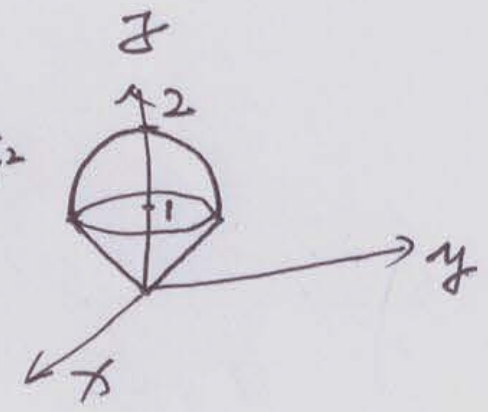
体积为 $\iiint_\Omega 1\,dv$.

选用柱坐标 $\begin{cases} r \le z \le 1+\sqrt{1-r^2} \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$

$dv = r\,dr\,d\theta\,dz$

$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\,dr \int_r^{1+\sqrt{1-r^2}} dz$

$= \pi$



2. 设 $D: x^2+y^2 \le 1$，则二重积分 $\iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy =$ _____

选用极坐标 $\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$

$d\sigma = r\,dr\,d\theta$

$\iint_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$

$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 e^{r^2} \cdot r\,dr$

$= (e-1)\pi$

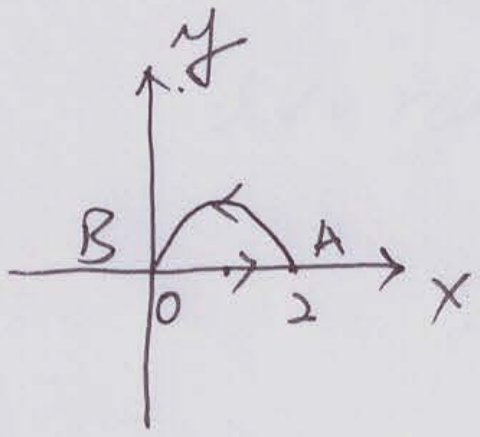
线面积分

1. 曲线 L 为 $x^2+y^2=1$，求曲线积分 $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$

$\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds = \int_L 1\,ds = 2\pi.$

2. 计算曲线积分 $I=\int_L (2xe^y+1)dx+(x^2e^y+2x)dy$，$L$ 是 $(x-1)^2+y^2=1$

上半圆周逆时针方向。



(1) 补直线 $\vec{BA}$：$y=0$，$x: 0 \to 2$.

$I+\int_{\vec{BA}}$

格林公式 $\iint_D (2xe^y+2-2xe^y)\,d\sigma$

$= 2\iint_D 1\,d\sigma = 2 \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 = \pi.$

(2) $\int_{\vec{BA}} = \int_0^2 (2xe^0+1)\,dx = (x^2+x)\Big|_0^2 = 6$

(3) $I = \pi - 6$

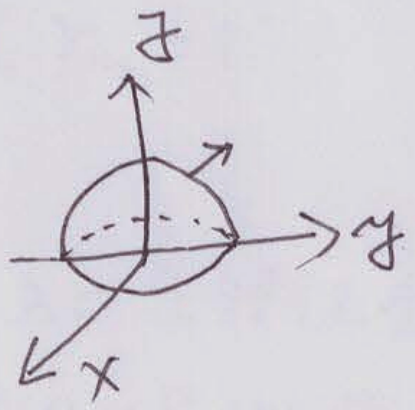
3. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，求曲面积分 $\iint_{\Sigma}(z+1)\mathrm{d}S$

$$\iint_{\Sigma}(z+1)ds = \iint_{\Sigma} z\,ds + \iint_{\Sigma} 1\,ds$$

$$= 0 + 4\pi a^2$$

对称性　　球面面积.

4. 计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + x(y^2-2z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2\,(0\le z\le 1)$ 的上侧。



(1) 补面：$z=0$，$x^2+y^2\le 1$，取下侧，记为 Σ_1.

$$I+\iint_{\Sigma_1}$$

高斯公式 $\iiint_{\Omega}(2z+y^2-2z+x^2)dV$

$$=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dV$$

$\Omega:\begin{cases}0\le z\le 1-r^2\\ 0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

$dV=r\,dr\,d\theta\,dz$

选用柱坐标 $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\,dr\int_0^{1-r^2} r^2\,dz$

$$=2\pi\int_0^1 r^3(1-r^2)dr$$

$$=\frac{\pi}{6}.$$

(2) $\iint_{\Sigma_1} = \iint_{D_{xy}}(-1)(-dxdy) = \iint_{D_{xy}} d\sigma = \pi\cdot 1^2=\pi.$

(3) $I=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5}{6}\pi.$