

北京工业大学 2007-2008 学年第二学期期末

线性代数(工) 课程试卷 (A)

一. 填空题 (每小题 3 分, 共 30 分) .

1. 矩阵乘积 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

2. 设 n 阶方阵 A, B 满足 $AB = A + B$, 则 $A - E$ 可逆, 且 $(A - E)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$

3. 如果 2 阶方阵 A 的特征值是 $1, -1$, A^* 为其伴随矩阵, 则行列式 $|A^* - 2E| = \underline{\hspace{2cm}}$

4. 设 3 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 β_1, β_2 满足 $\begin{cases} \alpha_1 = \beta_2 \\ \alpha_2 = -\beta_1 + \beta_2 \\ \alpha_3 = \beta_1 - 3\beta_2 \end{cases}$, 则由向量组

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 构成的矩阵 $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ 的行列式等于 $\underline{\hspace{2cm}}$ (写出具体数值)

5. 如果 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 0$, 而且 $p > 0$, 则 $p = \underline{\hspace{2cm}}$

6. 如果实系数方程组 $\begin{cases} b_1x + c_1y = -1 \\ b_2x + c_2y = 0 \\ b_3x + c_3y = 0 \end{cases}$ 有实数解, 则行列式 $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

7. 设 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0$ 是实对称矩阵 A 的特征值, $\alpha = (2, t+2, 1)^T, \beta = (1+t, -1, -2)^T$ 是

分别属于 $-1, 1$ 的特征向量, 则 $t = \underline{\hspace{2cm}}$

8. 如果 $\alpha = (1, 1, -1)^T$ 是实方阵 A 的一个特征向量, 则 $2A^2 - 3E$ 必有一个特征向量等于

$\underline{\hspace{2cm}}$

9. 如果 $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & a \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ 是正交矩阵, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$

10. 二次型 $(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 的正惯性指数与负惯性指数之和是

二. 单项选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)。将正确答案的字母填入括号内。

1. 如果 n 阶实矩阵 A 满足 $A^3 = 0$, E 是 n 阶单位矩阵, 则 【 】
 (A) $A + E$ 可逆, 但 $A - E$ 不可逆 (B) $A + E$ 不可逆, 但 $A - E$ 可逆
 (C) $A + E$ 、 $A - E$ 都可逆 (D) $A + E$ 、 $A - E$ 都不可逆
2. 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 而且其中的每一个向量都与向量 β 正交, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta$ 【 】
 (A) 一定线性相关 (B) 一定线性无关
 (C) 可能线性相关, 也可能线性无关 (D) 前三个选项都不正确

3. 设 A 是 n 阶方阵, 则下列选项中不正确的是 【 】

- (A) 当线性方程组 $AX = b$ 无解时, 行列式 $|A| = 0$ 。
 (B) 当线性方程组 $AX = b$ 有无穷多组解时, 行列式 $|A| = 0$ 。
 (C) 当行列式 $|A| = 0$ 时, 线性方程组 $AX = b$ 无解。
 (D) 当线性方程组 $AX = b$ 有唯一解时, 行列式 $|A| \neq 0$ 。

4. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的关系是 【 】

- (A) 相似但不等价 (B) 相似而且等价
 (C) 不相似但等价 (D) 既不相似也不等价

5. 实矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a^2 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 【 】

- (A) A 能够相似对角化 (B) A 不能相似对角化
 (C) 无确定结论 (D) 前三个选项都不正确

三. (10 分) 设实矩阵

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}, \quad (1) \text{ 计算 } MM^T; \quad (2) \text{ 计算行列式 } |M|.$$

四. (10 分) 将可逆矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 分解成初等矩阵乘积的形式。

五. (10 分) 参数 b 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 9x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = b \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 4 \end{cases}$$

有解? 有解时, 求出方程组的通解 (向量形式)。

六. (10 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 。求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵; 并写出相应的对角矩阵。

七 (10 分) 设向量组

$$\alpha_1 = (1, -1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (2, 0, 2, -1)^T, \alpha_3 = (0, -1, 0, -1)^T, \alpha_4 = (3, -3, 3, -2)^T。$$

(1) 求该向量的一个极大线性无关组。(2) 把其余向量用该极大线性无关组线性表出。

八 (5 分) 设 A 是实 $m \times n$ 型矩阵, β 是 m 维列向量。证明: 方程组 $A^T A X = A^T \beta$ 总是

有解的。(提示: 秩 $r(A^T A) = r(A)$)