北京工业大学 2024——2025 学年 第 一 学期

算法设计与分析　期末考试试卷　A 卷

考试说明：考试时长：95 分钟　考试方式：一纸开卷　适用专业：计算机科学与技术、物联网工程

承诺：

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人：_____　学号：_____　班号：_____

得 分

一、算法基本理论证明及简答题（共 40 分）

1、试证明下面的定理：[10 分]

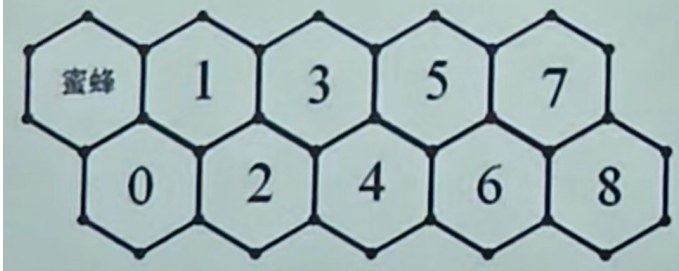
对于任意给定的函数 $f_1(n), f_2(n)$，如果 $f_1(n)=O(g_1(n))$ 且 $f_2(n)=O(g_2(n))$，则 $f_1(n)+f_2(n)=O(\max\{g_1(n), g_2(n)\})$

2、 蜂房问题[15 分]

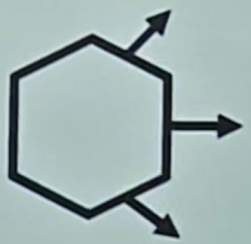
一排蜂房编号如图（a）所示，左上角有一只小蜜蜂，还不会飞，只会向前爬行，且每次只能爬到右侧的相邻蜂房，可能的前进方向如图（b）所示。

（1）它爬行到 8 号蜂房，共有多少种路线？[6 分]

（2）建立求解“蜂房问题”的数学模型（即递推公式）（可从（1）的答案中得到启发总结规律），并论述如何得到的这一模型。[9 分]



(a)



(b)

3、假设某算法在输入规模为 n 时的计算时间为：$T(n)=6\times 2^n$，在 A 型计算机上实现并完成该算法的时间为 t 秒，现有更先进的 B 型计算机，其运算速度为 A 型计算机的 1024 倍。试求出若在先进的 B 型机上运行同一算法则在 t 秒内能求解输入规模为多大的问题？[8 分]

4、对计算复杂性的研究能够使人们弄清所求解问题的固有难度，并得出评价某类算法优劣的准则，用以指导设计出更高效的算法。试用简短的语言说明“建立一个问题的复杂性的下界要比确定它的上界困难得多！”。[7 分]

得 分

二、算法设计与分析问题（共 60 分）

1、设有 n 个活动的集合 $E=\{1,2,\cdots,n\}$，其中每个活动都要求使用同一资源，如演讲会场等，而在同一时间内只有一个活动能使用这一资源。每个活动 i 都有一个要求使用该资源的起始时间 s_i 和一个结束时间 f_i，且 $s_i<f_i$。如果选择了活动 i，则它在半开时间区间 $[s_i, f_i)$ 内占用资源。若区间 $[s_i, f_i)$ 与区间 $[s_j, f_j)$ 不相交，则称活动 i 与活动 j 是相容的。目标：选出一个最大的互相兼容的活动集合。某同学针对这个问题设计贪心策略：开始时间晚的活动先安排。请问这个策略是否正确，如果正确请证明正确性，如果不正确请举出反例。[15 分]

2、下标查找[20 分]

设 n 个不同的排好序的整数存储于数组 A[0:n-1]中（不失一般性，可设数据呈递增顺序）。假设存在一个下标 i，0<=i<n，使得 A[i]等于 i，试设计一个算法找到这个下标 i，如果不存在输出-1。

示例：

输入：[-10， -8，0，3，7，7，]

输出：3

(1) 要求用分治法求解，请写出算法伪代码，需要标明分治的三个步骤：分解、解决、合并；关键代码一定要有注释[14 分]

(2) 请进行时间复杂度分析，需要写出时间复杂度的递推方程，并根据递推方程分析得出最终时间复杂度[6 分]

3、装载问题 [25 分]

问题描述：有 n 个集装箱要装上一艘载重为 C 的轮船，其中集装箱 i 的重量为 w_i，现在要把集装箱放到轮船上，问如何装载使得轮船尽量满载（即轮船上的集装箱总重量尽量接近轮船载重）

(1) 这属于组合优化问题，请用数学语言对上述问题加以形式化描述[5 分]

(2) 在（1）数学抽象基础上给出动态规划求解最优值的递推公式（要求对所给公式中的符号意义加以详细说明）[6 分]

(3) 具体实例：4 个集装箱，重量分别为 1，4，6，5，4 轮船载重量为 8，请结合该实例画出动态规划自底向上求最优值的表格，简述如何根据动态规划的最优值得到最优解的过程[10 分]

(4) 给出利用(2)的递推公式用动态规划求解该问题得到最优值的时间复杂度[4 分]