

一、填空题

- 5 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 的完全展开式中， $a_{12}a_{53}a_{41}a_{34}a_{25}$ 前的符号是_____
- 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 + 4A - 8E = 0$ ，则 $A - E$ 可逆，且 $(A - E)^{-1} =$ _____
- 设 A 为 2 阶可逆方阵， A^* 为 A 的伴随矩阵，若 $|A^* - A^{-1}| = -4$ ，则 $|A| =$ _____
- 设 A, B 均为 n 阶方阵，若 $AB = E$ ，则 $3E - BA =$ _____
- 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 β_1, β_2 满足 $\begin{cases} \alpha_1 = 21\beta_1 + 13\beta_2 \\ \alpha_2 = -\beta_1 + 5\beta_2 \\ \alpha_3 = 9\beta_1 - 13\beta_2 \end{cases}$ ，则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必线性_____关
- 设 A 为 6 阶方阵， A^* 为 A 的伴随矩阵，若秩 $r(A) = 3$ ，则齐次线性方程组 $A^*X = 0$ 的基础解系中含有解向量的个数为_____
- 设矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & a \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ ， B 为 3 阶非零矩阵，且 $(AB)X = 0$ 对任意三维列向量 X 都成立，则 $a =$ _____
- 设 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ 是实对称矩阵 A 的特征值， $\alpha = (-1, t+2, 3)^T, \beta = (-2+2t, 1, 2)^T$ 是分别属于 1, 2 的特征向量，则 $t =$ _____
- 如果 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ 是正交矩阵，则 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 =$ _____
- 二次型 $(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 的正惯性指数与负惯性指数之和是_____

二、单项选择题

- 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的关系是 【 】
 - 相同
 - 合同
 - 相似
 - 等价（初等行、列变换的意义下）
- 设 $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ 线性相关， $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 线性无关，则 【 】
 - $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关
 - $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关
 - α_1 可由 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 线性表出
 - β 能由 α_1, α_2 线性表出
- 设 $AX=0$ 是与 $AX=b$ 相应的齐次线性方程组，则正确的是 【 】
 - 若 $AX=0$ 只有零解，则 $AX=b$ 有唯一解

B. 若 $AX=0$ 有非零解, 则 $AX=b$ 有无穷多解

C. 若 $AX=b$ 有唯一解, 则 $AX=0$ 有零解

D. 若 $AX=b$ 无解, 则 $AX=0$ 有非零解

4. 设 A 为 n 阶矩阵, 且 $A^9=0$, 则

【 】

A. $A=0$

B. A 有一个非零特征值

C. A 的特征值全为零

D. A 有 n 个线性无关的特征向量

5. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 3 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$ 正定, 则

A. $a < 11$

B. $a = 11$

C. $a > 11$

D. a 可以任意

三、计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & -8 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 9 & 27 \\ 2 & a & a^2 & a^3 \end{vmatrix}$

四、已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 B , 使 $8AB = 3A + 8B$

五、参数 b 取何值时, 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = b \end{cases}$ 有解? 有解时, 求出此方程组的通解 (向量形式)。

六、在三维空间 R^3 中, 已知 $\alpha = (0, 1, 1)$, $\beta = (1, 1, 0)$ 。(1) 求向量 γ , 使得 α, β, γ 成为 R^3 的一个基; (2) 将

α, β, γ

正交化, 给出 R^3 的一个正交基。

七、设向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (2, 0, 0, -1)^T$, $\alpha_3 = (1, -3, 2, 0)^T$, $\alpha_4 = (4, -4, 2, 0)^T$

(1) 求该向量组的一个极大线性无关组

(2) 把其余向量用该极大无关组线性表出

八、证明: 如果 n 阶实对称矩阵 A 满足 $A^5 - 2A^4 + 5A^3 - 8A^2 - 9E = 0$, 则 A 一定是正定矩阵