

北京工业大学 2008-2009 学年第二学期开学初

线性代数(工) 补考试卷

一. 填空题 (每小题 3 分, 共 30 分) .

1. 若 6 阶行列式 $|a_{ij}|$ 完全展开式中 $a_{11}a_{23}a_{45}a_{5i}a_{3j}a_{64}$ 前的符号是正号, 则

$$i - j = \underline{\hspace{2cm}}$$

2. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - A = 0$, 则 $A + 2E$ 可逆, 且 $(A + 2E)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$

3. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 1, -1, 2, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则 $|A^* + E| = \underline{\hspace{2cm}}$

$$4. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 8 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$$

5. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 β_1, β_2 是三维列向量组, 满足
$$\begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 + 2\beta_2 \\ \alpha_2 = -\beta_1 + \beta_2 \\ \alpha_3 = \beta_1 - 3\beta_2 \end{cases}$$
 则矩阵

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \text{ 的行列式 } |(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| = \underline{\hspace{2cm}}$$

6. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & a \\ -3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$, B 为 3×9 型非零矩阵, 且 $AB = B$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$

7. 设 A 为 5 阶方阵. 若秩 $r(A) = 4$, 则齐次线性方程组 $A^*X = 0$ 的基础解系中含有解向量的个数为 $\underline{\hspace{2cm}}$

8. 设 $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 2$ 是实对称矩阵 A 的特征值, $\alpha = (-2, t+1, 1)^T, \beta = (t, 1, -2)^T$ 是分别属于 6, 2 的特征向量, 则 $t = \underline{\hspace{2cm}}$

9. 若矩阵 $\begin{pmatrix} a & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$ 是正交矩阵, 则 $\sqrt{2}(a^2 + b^2 + c^2) = \underline{\hspace{2cm}}$

10. 二次型 $(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 的正惯性指数与负惯性指数之和是_____

二. 单项选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)。将正确答案的字母填入括号内。

- 若 A, B 都是 n 阶实方阵, 则下列选项中不正确的是 【 】
 (A) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 一定成立 (B) $(AB)^T = B^T A^T$ 一定成立
 (C) $|AB| = |A||B|$ 一定成立 (D) 前三个选项有两个正确
- 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 则 【 】
 (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是正交向量组 (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关
 (C) α_4 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出 (D) 前三个选项都不正确
- 设 n 阶实方阵 A 满足 $A^{12} = 0$, 则 【 】
 (A) $A + E$ 可逆, 但 $A - E$ 不可逆 (B) $A + E$ 、 $A - E$ 都可逆
 (C) $A + E$ 不可逆, 但 $A - E$ 可逆 (D) $A + E$ 、 $A - E$ 都不可逆
- 矩阵 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的关系是 【 】
 (A) 既合同又相似 (B) 相似但不合同
 (C) 合同但不相似 (D) 既不合同又不相似
- 若 $x_1^2 + x_2^2 + ax_3^2 + ax_4^2 + 2x_2x_4$ 是正定二次型, 则 【 】
 (A) $a < -1$ (B) $a > 1$ (C) $a = 0$ (D) a 可以是任何实数

三. (10 分) 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & 0 & 3 & 4 \\ -3 & -3 & -3 & 0 & 4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$ 的值。

四. (10 分) 将矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 分解成初等矩阵乘积的形式。

五. (10 分) 参数 b 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = b \end{cases}$$

有解？有解时，求出此方程组的通解（向量形式）。

六. (10 分) 已知 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 。用相似对角化方法，计算 A^{100} 。

七 (10 分) 设向量组

$$\alpha_1 = (0, -1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0, -1)^T, \alpha_3 = (3, 2, 0, -2)^T, \alpha_4 = (2, 0, 0, 0)^T。$$

(1) 求该向量组的一个极大线性无关组。

(2) 把其余向量用该极大线性无关组线性表出。

八 (5 分) 已知实 n 阶矩阵 A 是正交矩阵， A^* 是其伴随矩阵。问： A^* 是否一定是正交矩阵？若是，证明你的结论；若不是，请给出反例。