

北京工业大学 2010-2011 学年第 1 学期开学初

线性代数(工)

一. 填空题 (每小题 3 分, 共 30 分) .

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -2 & -1 & x^2 \\ 0 & x & 3 \end{vmatrix}$ 的完全展开式中, x^3 的系数是_____

2. 设 n 阶方阵 A 满足: $A^2 - A + E = 0$, E 是 n 阶单位矩阵, 则 $A + E$ 可逆, 且 $(A + E)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$

3. 设 A 是 3 阶实方阵。 $A, A - E, A - 2E$ 均不可逆。则行列式 $|A^2 - A + E| = \underline{\hspace{2cm}}$

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hspace{2cm} \\ \hspace{2cm} \\ \hspace{2cm} \end{pmatrix}$

5. 如果三维列向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 和 $\{\beta_1, \beta_2\}$ 满足 $\begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 - 2\beta_2 \\ \alpha_2 = -\beta_2 \\ \alpha_3 = 2\beta_1 + 3\beta_2 \end{cases}$, 则矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的行列式 $|(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| = \underline{\hspace{2cm}}$ (要求填具体数字)

6. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$, B 是 3 阶非零矩阵, 且 $AB = 0$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$

7. 设 A 为 5 阶方阵。若秩 $r(A) = 2$, 则齐次线性方程组 $AX = 0$ 的基础解系中含有解向量的个数为_____

8. 设 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$ 是实对称矩阵 A 的特征值, $\alpha = (-1, t+1, 1)^T, \beta = (t, 2, -1)^T$ 是分别属于 $-1, 1$ 的特征向量, 则 $t = \underline{\hspace{2cm}}$

9. 若矩阵 $\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ \cos \theta & \sin \theta & c \\ \sin \theta & e & d \end{pmatrix}$ 是正交矩阵, 且 $b < 0$, 则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} \hspace{2cm} \\ \hspace{2cm} \\ \hspace{2cm} \end{pmatrix}$

10. 二次型 $(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 的正、负惯性指数之和 = ____

二. 单项选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)。将正确答案的字母填入括号内。

1. 矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的关系是 【 】

- (A) 合同但不相似 (B) 相似但不合同
(C) 合同而且相似 (D) 既不同合同又不相似

2. 若 $0, -1$ 是实对称矩阵 A 的特征值, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 A 的属于 0 的一个特征向量组,

β_1, β_2 是 A 的属于 -1 的一个特征向量组, 则 【 】

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 一定是线性无关向量组 (B) α_1, β_2 一定正交
(C) $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 一定是线性相关向量组 (D) 前三个选项都不正确

3. 设 n 阶实对称矩阵 A 满足 $A^9 = 0$ (其中 $n < 9$),

那么, 下列陈述中不正确的是 【 】

- (A) A 的特征值是零 (B) $A \neq 0$
(C) A 可以相似对角化 (D) $A + E$ 是可逆矩阵

4. 下列陈述中不正确的是 【 】

- (A) 初等矩阵的行列式都是正数 (B) 若实方阵 A 的行列式 $|A| < -1$, 则 $A^T \neq A^{-1}$
(C) 有些初等矩阵的逆矩阵是其本身 (D) 实方阵 A 及其伴随矩阵 A^* 满足

$$AA^* = |A|E$$

5. 如果 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a \end{pmatrix}$ 是实正定矩阵, 则 【 】

- (A) $a > -1$ (B) $a < -1$ (C) $a = 1$ (D) a 可以是任何负实数

三. (10 分) 记行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -8 \\ 1 & 3 & 0 & 27 \end{vmatrix}$ 的第三列元素位置的代数余子式依次是

$A_{13}, A_{23}, A_{33}, A_{43}$ 。求 $A_{13} + A_{23} + 4A_{33} + 9A_{43} = ?$ (要求算出具体的数值)

四. (10 分) 将矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 分解成初等矩阵乘积的形式。

五. (10 分) 参数 b 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 - x_4 = b \end{cases}$$

有解? 有解时, 求出此方程组的通解。

六. (10 分) 对矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵; 并写

出这一对角矩阵。

七 (10 分) 给定列向量组

$$\alpha_1 = (1, -1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (1, 2, -1, 1)^T, \alpha_3 = (-1, -5, 2, -1)^T, \alpha_4 = (3, 0, -1, 3)^T$$

(1) 求该向量组的一个极大线性无关组;

(2) 把其余向量用 (1) 中的极大线性无关组线性表出。

八 证明题 (5 分) 利用实对称矩阵和秩的知识, 证明: 实矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\varepsilon & 1 \\ 1+\varepsilon & 1 & 1+\varepsilon \\ 1 & 1+\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$

的三个特征值中, 一个是 0, 另两个不是 0。 (其中, $\varepsilon \neq 0$)。