

2014-2015 年第一学期《普通物理 I -1》期末试卷 A 卷

北京工业大学 2014——2015 学年第 1 学期

《普通物理 I-1》期末考试试卷 A 卷答案

一、(10 分) 质点作半径 $R=1\text{ m}$ 的圆周运动, 其角位置 $\theta=1+t^3$ (SI), 求 $t=2\text{ s}$ 时的角速度 ω , 角加速度 α , 法向加速度 a_n 及切向加速度 a_t .

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 3t^2 \rightarrow \omega = 12\text{ rad/s},$$

$$\text{解: } \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = 6t \rightarrow \alpha = 12\text{ rad/s}^2,$$

$$a_n = R\omega^2 \rightarrow a_n = 144\text{ m/s}^2,$$

$$a_t = R\alpha \rightarrow a_t = 12\text{ m/s}^2$$

二、(10 分) 质量为 M 的船静止. 现以水平速度 v_0 将一质量为 m 的砂袋抛到船上, 此后两者一起运动. 设阻力大小与速率成正比, 且 $f=-kv$ ($k>0$), 以船开始运动时 $t=0$, 试求: (1) 船开始运动时的速度 v' ; (2) t 时刻船的运动速度 $v(t)$.

$$\text{解: (1) 根据动量守恒, } m\vec{v}_0 = (m+M)\vec{v}' \rightarrow \vec{v}' = \frac{m\vec{v}_0}{(m+M)}$$

$$(2) \text{ 以 } \vec{v}_0 \text{ 方向为 } X \text{ 方向, 根据牛顿第二定律: } \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\rightarrow -kv = (m+M)a = (m+M)\frac{dv}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{-k}{m+M} dt = \frac{dv}{v} \rightarrow \int_0^t \frac{-k}{m+M} dt = \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} \rightarrow \frac{-kt}{m+M} = \ln \frac{v}{v_0}$$

$$\rightarrow \frac{v}{v_0} = e^{\frac{-kt}{m+M}} \rightarrow v = v_0 e^{\frac{-kt}{m+M}} \rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 e^{\frac{-kt}{m+M}} = \frac{m\vec{v}_0}{m+M} e^{\frac{-kt}{m+M}}$$

三、(10 分) 质量为 1 kg 的静止物体, 从坐标原点出发沿 X 轴运动, 合力 $\vec{F} = (7+3x^2)\vec{i}$ (SI). 求: (1) 从开始运动到 $x=1\text{ m}$ 处力 $\vec{F}$ 所做的功 A ; (2) 物体在 $x=1\text{ m}$ 处的速度 $\vec{v}_1$; (3) 从开始运动到 $x=1\text{ m}$ 处力 $\vec{F}$ 产生的冲量 $\vec{I}$.

解: (1) $A = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^4 (7 + 3x^2) dx = 8 \text{ J}$

(2) 物体初速度为 0, 根据动能定理有 $\frac{1}{2}mv_1^2 = A = 8 \Rightarrow v_1 = 4 \text{ m/s}$

(3) 物体初速度为 0, 根据动量定理, $I = mv_1 = 4 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$

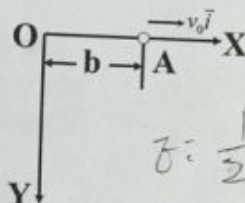
四、(10 分) 如图, 在 $t=0$ 时刻将质量为 m 的质点由 A 处以初速度 $v_0 \vec{i}$ 抛出, 求:

(1). 写出质点的运动函数 $\vec{r}(t)$.

(2). t 时刻, 质点所受的对原点 O 的力矩 $\vec{M}$.

(3). t 时刻, 质点对原点 O 的角动量 $\vec{L}$.

(注意: 重力加速度以 g 表示, 不需具体数值)



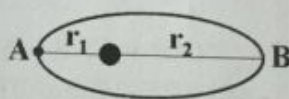
第四题图

解: (1) $\vec{r}(t) = (b + v_0 t) \vec{i} + \frac{1}{2} g t^2 \vec{j}$;

(2) $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \left[(b + v_0 t) \vec{i} + \frac{1}{2} g t^2 \vec{j} \right] \times m g \vec{j} = m g (b + v_0 t) \vec{k}$;

(3) $\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v} = m \left[(b_0 + v_0 t) \vec{i} + \frac{1}{2} g t^2 \vec{j} \right] \times [v_0 \vec{i} + g t \vec{j}] = m g (b t + \frac{1}{2} v_0 t^2) \vec{k}$

五、(10 分) 如图, 质量为 m 的卫星绕地球作椭圆运动, A、B 两点距地心分别为 r_1 、 r_2 . 设地球质量为 M , 若地球的半径忽略不计, 则求:



第五题图

(1) 卫星在 A、B 两点的动能之差 $E_{kA} - E_{kB}$.

(2) 卫星在 A、B 点的运动速率 v_A 、 v_B .

(3) 若椭圆轨道的面积为 $S = \frac{\pi}{2} (r_1 + r_2) \sqrt{r_1 r_2}$, 求卫星的运动周期 T .

解: (1) 根据机械能守恒,

$$E_{kA} - E_{kB} = \frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{1}{2} m v_B^2 = E_{pB} - E_{pA} = \frac{GMm}{r_1} - \frac{GMm}{r_2}$$

(2) 根据角动量守恒, 有 $r_1 v_A = r_2 v_B$, 与上式联立, 可求出

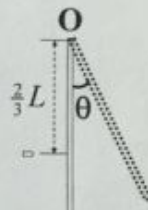
$$v_A = \sqrt{\frac{2GM r_2}{(r_1 + r_2) r_1}} \quad v_B = \sqrt{\frac{2GM r_1}{(r_1 + r_2) r_2}}$$

(3) 椭圆轨道的面积 $S = \frac{\pi}{2}(r_1 + r_2)\sqrt{r_1 r_2}$

掠面速度 $\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} = \frac{mv_A r_1}{2m} = \sqrt{\frac{GM r_1 r_2}{2(r_1 + r_2)}}$

$\rightarrow T = \frac{S}{dS/dt} = \frac{\pi(r_1 + r_2)^{3/2}}{\sqrt{2GM}}$

六、(10分) 质量为 M ，长为 L 的均匀细杆沿光滑轴 O 转动，质量为 $M/4$ 的子弹距 O 轴 $2L/3$ 处以速度 v_0 沿水平方向射入细杆，求：(1) 均匀细杆相对于 O 轴的转动惯量 J ；(2) 子弹嵌入后，细杆转动的角速度 ω ；(3) 细杆的最大摆角 θ ；



第六题图

解：(1) $J = mL^2/3$

(2) 嵌入过程中，子弹—杆系统 $L = \text{const.}$

$mv_0 \cdot \frac{2}{3}L = [m(\frac{2}{3}L)^2 + \frac{1}{3}ML^2]\omega \rightarrow \omega = \frac{3v_0}{8L}$

(3) 上摆过程中，子弹—杆—地球系统， $E_p + E_k = \text{const.}$ 令 O 轴处 $E_p = 0$ ，则有

$(-mg \cdot \frac{2}{3}L - Mg \cdot \frac{1}{2}L) + \frac{1}{2}[m(\frac{2}{3}L)^2 + \frac{1}{3}ML^2]\omega^2 = -mg \cdot \frac{2}{3}L \cos \theta - Mg \cdot \frac{1}{2}L \cos \theta$

$\rightarrow \theta = \arccos(1 - \frac{3v_0^2}{64gL})$

七、(10分) 细棒静止质量为 m_0 ，长度为 L_0 ，当它沿棒长方向做高速运动时，测得其长度为 L ，求：(1) 细棒的运动速度 v ；(2) 该棒的相对论总能量 E ；(3) 该棒的相对论动能 E_k ；(4) 棒的线密度 λ 。

解：(1) 根据长度收缩， $L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow v = \frac{c}{L_0} \sqrt{L_0^2 - L^2}$

(2) $E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2 L_0}{L}$

(3) $E_k = mc^2 - m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2 (L_0 - L)}{L}$

$$(4) \lambda = \frac{m}{L} = \frac{m_0}{L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 L_0}{L^2}$$

八、(10分) 粒子的速率分布函数如图, 求:

(1) 根据速率分布函数归一化条件求常量 a ;

(2) 求速率在 $[v_0, 2v_0]$ 区间的分子占总分子数的比例;

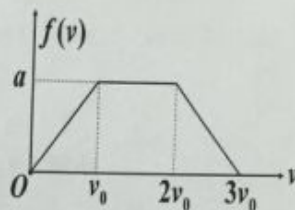
(3) 求所有粒子的平均速率 $\bar{v}$;

解: (1) 归一化要求对应曲线下面积为 1,

$$\text{可得: } \frac{1}{2}av_0 + av_0 + \frac{1}{2}av_0 = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2v_0}$$

$$(2) P = \int_{v_0}^{2v_0} f(v)dv = \frac{1}{2}$$

$$(3) \bar{v} = \int_0^\infty vf(v)dv = \int_0^{v_0} \frac{av^2}{v_0}dv + \int_{v_0}^{2v_0} avdv + \int_{2v_0}^{3v_0} av\left(3 - \frac{v}{v_0}\right)dv = \frac{3}{2}v_0$$



第八题图

九、(10分) 刚性多原子分子理想气体的状态变化遵从 $PV^2=B$ 的规律(B 为常量), 则当体积由 V_1 膨胀至 $2V_1$ 时, 求: (1) 该气体的自由度 i ; (2) 气体对外做功 A ; (3) 气体内能的增量 ΔE ; (4) 气体从外界吸收的热量 Q .

解: (1) $i=6$;

$$(2) A = \int_{V_1}^{2V_1} PdV = \int_{V_1}^{2V_1} \frac{B}{V^2} dV = \frac{B}{2V_1}$$

$$(3) \Delta E = -\frac{3B}{2V_1}$$

$$(4) Q = -\frac{B}{V_1}$$

$$E = \frac{i}{2} \nu RT$$

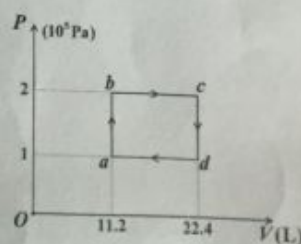
$$PV = \nu RT = \frac{B}{V}$$

$$E_2 - E_1 = \frac{3B}{2V} - \frac{3B}{2V_1}$$

十、(10分) 一定量的氧气(视为刚性双原子分子理想气体)作如图所示的正循环。已知理想气体的定体摩尔热容为 $C_V = iR/2$, 定压摩尔热容为 $C_P = (i+2)R/2$, 其中 $R=8.31\text{J}\cdot\text{mol/K}$ 。求:

(1) 氧气分子的自由度 i ;

(2) 分析 ab , bc , cd , da 四个过程哪两个过程



第十题图

为吸热过程；并求其吸热量 Q ；

(3) 该循环对外界所作的总功 A ；

(4) 该循环的效率 η 。

解：(1) $i=5$

(2) ab 和 bc 过程为吸热过程， ab 为等体过程，摩尔热容 $C_v = 5R/2$ ， bc 为等压过程，摩尔热容为 $C_p = 7R/2$ ，

$$\text{则 } Q_{ab} = \nu C_v (T_b - T_a) = \nu \frac{5}{2} R (T_b - T_a) = \frac{5}{2} (P_b V_b - P_a V_a) = 2800 J$$

$$Q_{bc} = \nu C_p (T_c - T_b) = \nu \frac{7}{2} R (T_c - T_b) = \frac{7}{2} (P_c V_c - P_b V_b) = 7840 J$$

$$(2) \text{ 对外界总功即为循环曲线包围面积： } A = (P_b - P_a)(V_c - V_b) = 1120 J$$

$$(3) \eta = A / Q_1 = 1120 / (2800 + 7840) \cong 10.5\%$$