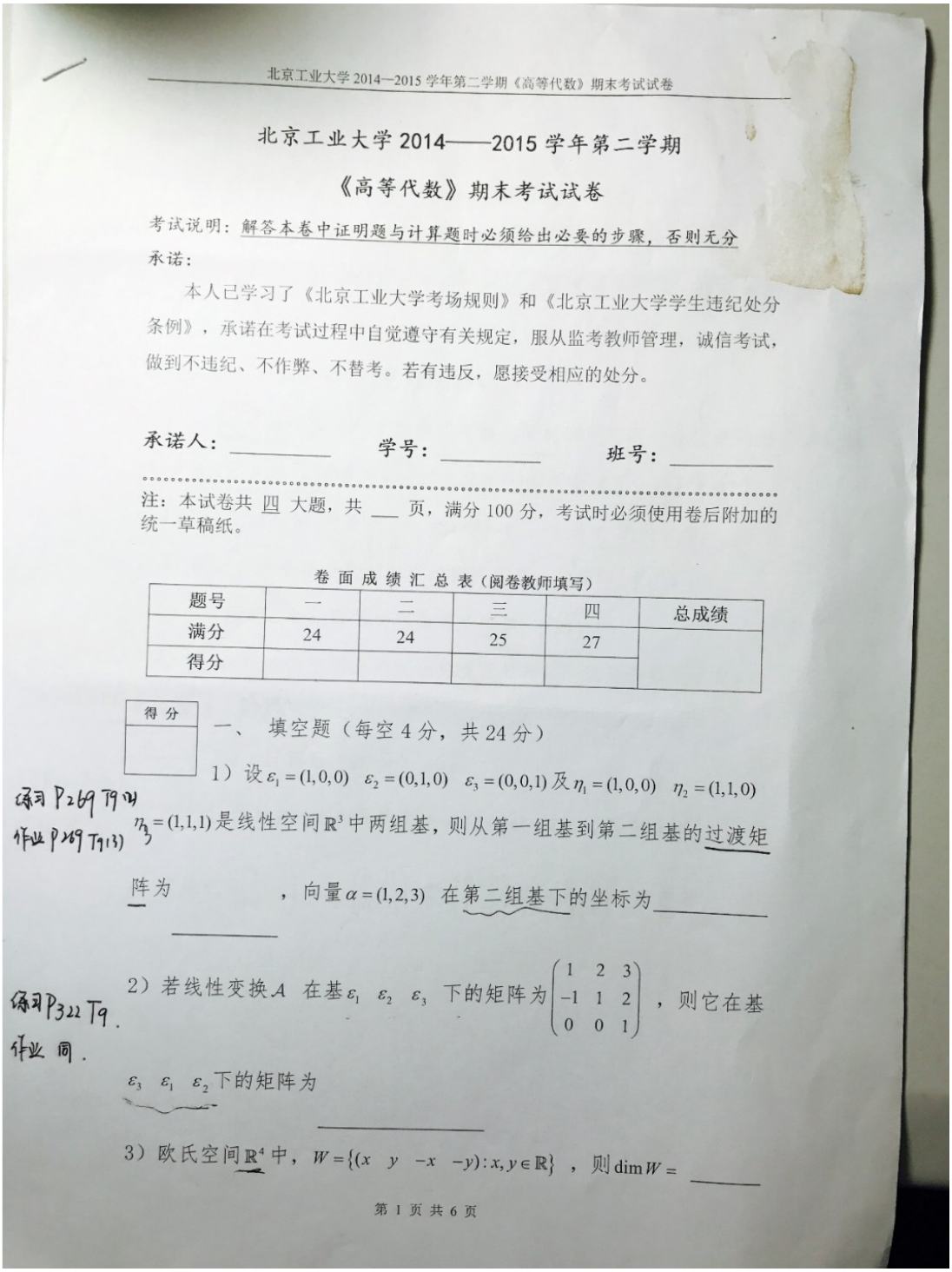
2014-2015 年第 2 学期《高等代数》期末考试



北京工业大学 2014——2015 学年第二学期

《高等代数》期末考试试卷

考试说明：解答本卷中证明题与计算题时必须给出必要的步骤，否则无分

承诺：

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人：_____ 学号：_____ 班号：_____

注：本试卷共 四 大题，共 ___ 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸。

卷面成绩汇总表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三	四	总成绩
满分	24	24	25	27	
得分					

得分

一、 填空题（每空 4 分，共 24 分）

1）设 $\varepsilon_1=(1,0,0)$ $\varepsilon_2=(0,1,0)$ $\varepsilon_3=(0,0,1)$ 及 $\eta_1=(1,0,0)$ $\eta_2=(1,1,0)$ $\eta_3=(1,1,1)$ 是线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中两组基，则从第一组基到第二组基的过渡矩阵为 _____，向量 $\alpha=(1,2,3)$ 在第二组基下的坐标为 _____

练习 P269 T9(1)
作业 P269 T9(3)

2）若线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 ε_1 ε_2 ε_3 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，则它在基 ε_3 ε_1 ε_2 下的矩阵为 _____

练习 P322 T9.
作业 同.

3）欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 中，$W=\{(x\ \ y\ \ -x\ \ -y):x,y\in\mathbb{R}\}$，则 $\dim W=$ _____

$\dim W^{\perp} =$ _____

4）欧氏空间 $\mathbb{R}^2$ 中，基 $\varepsilon_1 = (1,0)$ $\varepsilon_2 = (1,1)$ 的度量矩阵为 _____

得 分

二、 判断题（每题 3 分，对的在括号里画√，错的画×）

（√）1、$\mathbb{P}$ 上两线性空间同构的充要条件是它们的维数相等 P371

（√）2、线性空间 V 的两线性子空间 $V_1 V_2$ 的和是直和的充要条件是 $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V_1 + V_2$ P262~263

（√）3、有限维线性空间中的线性变换是单射的充要条件是它是满射 P305推论

（√）4、实对称矩阵属于不同特征值的特征向量相互正交 P379

（×）5、设矩阵 A 满足 $A^2 = E$ 则 1 与 -1 一定是 A 的特征值

（×）6、正交变换在任意基下的矩阵都是正交矩阵 P372

（×）7、任意对称矩阵的特征值都是实数 P371

（×）8、n 维线性空间上的线性变换可对角化的充要条件是它有 n 个特征向量 P299.

得 分

三、 计算题（25 分）

1、已知 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上的线性变换 $\sigma(X) = MX + XM$ ，其中 $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 求 σ 在基 $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵

2、已知 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ 求正交矩阵 T 使得 $T'AT$ 为对角矩阵，并求出 $T'AT$

得 分

四、 证明题（27 分）

1、设 V_1，V_2 是线性空间 V 的两线性子空间，证明：

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$$

书 P260.

2、设σ 是线性空间V上的线性变换，$\xi \in V$，如果$\sigma^{n-1}\xi \neq \theta$，但$\sigma^n\xi = \theta$，

求证：~~$\xi, \sigma\xi, \cdots, \sigma^{n-1}\xi$~~ 线性无关 高书 P322 T10.

$\xi, \sigma\xi, \cdots, \sigma^{n-1}\xi$

假设存在一组数 $a_1, a_2, \cdots a_n$，使

$$a_1\xi + a_2\sigma\xi + \cdots + a_n\sigma^{n-1}\xi = 0.$$

用 σ^{n-1} 作用于等式两边，得

$$a_1\sigma^{n-1}\xi + a_2\sigma^n\xi + \cdots + a_n\sigma^{2n-2}\xi = 0$$

当 $k \geq n$ 时，$\sigma^k\xi = 0$. $\therefore a_1\sigma^{n-1}\xi = 0$. 又 $\sigma^{n-1}\xi \neq 0$.

$\therefore a_1 = 0$.

于是有 $a_2\sigma\xi + \cdots + a_n\sigma^{n-1}\xi = 0$.

再用 σ^{n-2} 作用于等式两边，得 $a_2\sigma^{n-1}\xi = 0 \Rightarrow a_2 = 0$.

以此类推，得 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$，故 $\xi, \sigma\xi, \cdots, \sigma^{n-1}\xi$ 线性无关.

3、证明：正交的向量组必线性无关

证明：设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 是 n 维正交向量组

设存在一组数 $k_1, k_2 \cdots k_s$，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

用 α_i ($i = 1, 2, \cdots s$) 与上式两边做内积得

$$(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s, \alpha_i) = (0, \alpha_i)$$

即 $k_1(\alpha_1, \alpha_i) + k_2(\alpha_2, \alpha_i) + \cdots + k_s(\alpha_s, \alpha_i) = 0$

已知 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 是正交向量组.

$$\therefore (\alpha_j, \alpha_i) \begin{cases} = 0, & j \neq i \\ \neq 0, & j = i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots s;\ j = 1, 2, \cdots s)$$

$\therefore k_i = 0$ ($i = 1, 2, \cdots s$)

$\therefore \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 线性无关.