

北京工业大学 2014—2015 学年第二学期

《高等数学(工)—2》期末考试试卷 A 卷参考答案

一、填空题 (本大题共 10 小题, 每题 4 分, 共 40 分)

得分

一、填空题 (本大题共 10 小题, 每题 4 分, 共 40 分)

1. 微分方程 $(x^2 + 1)dy + 2xydx = 0$ 的通解为_____.2. 由方程 $x^3 + y^3 - yz = 1$ 所确定的函数 $z = z(x, y)$ 在 $(1, 1, 1)$ 点的全微分

$$dz = \underline{\hspace{2cm}}.$$

3. 函数 $z = \ln(x^2 + y)$ 在点 $(-1, 1)$ 的梯度 $\text{grad } z = \underline{\hspace{2cm}}.$ 4. 数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{k + \ln n}{n^2}$ (k 为常数) 的敛散性是_____.

(若收敛, 需指出是绝对收敛还是条件收敛)

5. 函数 $f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$ 的麦克劳林级数为_____.6. 曲面 $2xy - e^z + z = 3$ 的在点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面方程为_____.7. 设曲面 $\Sigma: z = \sqrt{x^2 + y^2} (0 \leq z \leq 1)$, 则曲面积分

$$\iint_{\Sigma} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dS = \underline{\hspace{2cm}}.$$

8. 设曲线 L 是平面上任意一条闭曲线, 若 $\oint_L y dx - ax dy \equiv 0$, 则常数 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$ 9. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 且 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq 0; \\ 2x - 1, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$ $S(x)$ 是 $f(x)$

的傅立叶级数的和函数, 则 $S(5\pi) =$ _____.

10. 设 $L: x - y + 1 = 0, 0 \leq x \leq 1$, 则 $\int_L (2x + y) ds =$ _____.



1、 $x^2y + y = C$ 2、 $3dx + 2dy$ 3、 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ 4、 绝对收敛

5、 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{2^{n+1}} x^n, |x| < \frac{2}{3}$ 6、 $x + 2y - 4 = 0$ 7、 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

8、 -1 9、 $\pi - 1$ 10、 $\frac{4}{3}\pi$

二、 计算题 (本大题共 5 小题, 每题 10 分, 共 50 分)

11. 求函数 $f(x, y) = 2xy + x^2 + 2y^2 - 1$ 的极值.

【解】 令 $\begin{cases} f'_x = 2y + 2x = 0 \\ f'_y = 2x + 4y = 0 \end{cases}$, 得驻点 $(0, 0)$ 4 分

又 $f''_{xx} = 2, f''_{xy} = 2, f''_{yy} = 4$ 7 分

在点 $(0, 0)$ 处, $AC - B^2 = 4 > 0$,

且 $A = 2 > 0$, 所以极小值 $f(0, 0) = -1$ 10 分

12. 计算曲线积分 $I = \int_L (y - 2x \cos y) dx + (x^2 + e^y) \sin y dy$, 其中 L 为沿

着 $x^2 + y^2 = 4$ 上从点 $A(2, 0)$ 到点 $B(-2, 0)$ 的上半圆弧.

【解】 设 $P = y - 2x \cos y, Q = (x^2 + e^y) \sin y$,

则 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \sin y, \frac{\partial P}{\partial y} = 1 + 2x \sin y, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -1$ 3 分

补直线段 $BA: y = 0, -2 \leq x \leq 2$,5 分

$$\text{故 } I = \iint_{L+BA} - \int_{BA} = \iint_D 1 dx dy - \int_2^0 (0 - 2x \cos 0) dx \cdots \cdots \cdots 8 \text{ 分}$$

$$= -2\pi + 0 = -2\pi \cdots \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

13. 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (y^2 + \cos z) dy dz - (x^2 + e^z) dz dx + z^3 dx dy,$$

其中 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 介于平面 $z = 0$ 与 $z = 2$ 之间部分的下侧.

【解】 设 $P = y^2 + \cos z$, $Q = -(x^2 + e^z)$, $R = z^3$,

$$\text{则 } \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 3z^2,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3z^2 \cdots \cdots \cdots 3 \text{ 分}$$

补平面 $\Sigma_1: z = 2 (x^2 + y^2 \leq 4)$, 取上侧。 $\cdots \cdots \cdots 5 \text{ 分}$

$$\text{故 } I = \oint_{\Sigma+\Sigma_1} = \iiint_{\Omega} 3z^2 dV - \iint_D 8 dx dy \cdots \cdots \cdots 8 \text{ 分}$$

$$= \int_0^2 3z^2 dz \iint_{D_z} dx dy - 32\pi = \frac{3}{5} * 32\pi - 32\pi = -\frac{64}{5}\pi \cdots \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

14. 求微分方程 $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$ 的通解.

【解】 特征方程: $r^2 - 5r + 6 = 0$,

特征根为 $r_1 = 2$, $r_2 = 3$,

对应的齐次方程通解为: $Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} \cdots \cdots \cdots 4 \text{ 分}$

设非齐次方程特解为: $y^* = Q(x)e^{2x}$, 代入原方程得

$$Q''(x) - Q'(x) = x, \quad \text{可设 } Q(x) = x(ax + b)$$

解得 $a = -\frac{1}{2}, b = -1$,8 分

所以特解为: $y^* = -\left(\frac{x^2}{2} + x\right)e^{2x}$

故原方程通解为: $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} - \left(\frac{x^2}{2} + x\right)e^{2x}$ 10 分

15. 求: (1) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$ 的收敛域及和函数;

(2) 常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1) \cdot 2^n}$ 的和.

【解】(1)、 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n$

因此令 $S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n, S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$,

由 $S_1(x), S_2(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$, 则 $S(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$.

$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$,4 分

$xS_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, (xS_2(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, x \in (-1, 1), S_2(0) = 0.$

从而 $xS_2(x) = \int \frac{t}{1-t} dt = -\ln(1-x) - x, x \in (-1, 1),$

$S_2(x) = -\frac{1}{x} \ln(1-x) - 1, x \in (-1, 1), x \neq 0.6 分$

所以 $S(x) = S_1(x) - S_2(x) = \frac{1}{x} \ln(1-x) + \frac{1}{1-x}, x \in (-1, 1), x \neq 0,$

$S(x) \begin{cases} = \frac{1}{x} \ln(1-x) + \frac{1}{1-x}, & x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \\ 0 & x = 0, \end{cases}8 分$

$$(2) 、 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1) \cdot 2^n} = S\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 2\ln 2 \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

三、 证明题 (本大题共 2 小题, 每题 5 分, 共 10 分)

16. 设 $u(x, y) = f(x + 2y) + \int_0^{x-2y} g(t) dt$, 其中 f 和 g 二阶可导,

试证明: $4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

【解】 $\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x + 2y) + g(x - 2y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2f'(x + 2y) - 2g(x - 2y), \dots 2 \text{ 分}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x + 2y) + g'(x - 2y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4f''(x + 2y) + 4g'(x - 2y), \dots 4 \text{ 分}$$

$$\Rightarrow 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \dots 5 \text{ 分}$$

17. 已知函数 $y = y(x)$ 满足等式 $y' = x + y$, 且 $y(0) = 1$,

试讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[y\left(\frac{1}{n}\right) - 1 - \frac{1}{n} \right]$ 的收敛性.

解: 求解定解问题 $\begin{cases} y' - y = x, & \text{得 } y(x) = 2e^x - x - 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$u_n = y\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} - 1 = 2 \left(e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} - 1 \right) \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n^2 \left(e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} - 1 \right) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{1}{2n^2} = 1$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[y\left(\frac{1}{n}\right) - 1 - \frac{1}{n} \right]$ 收敛. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$