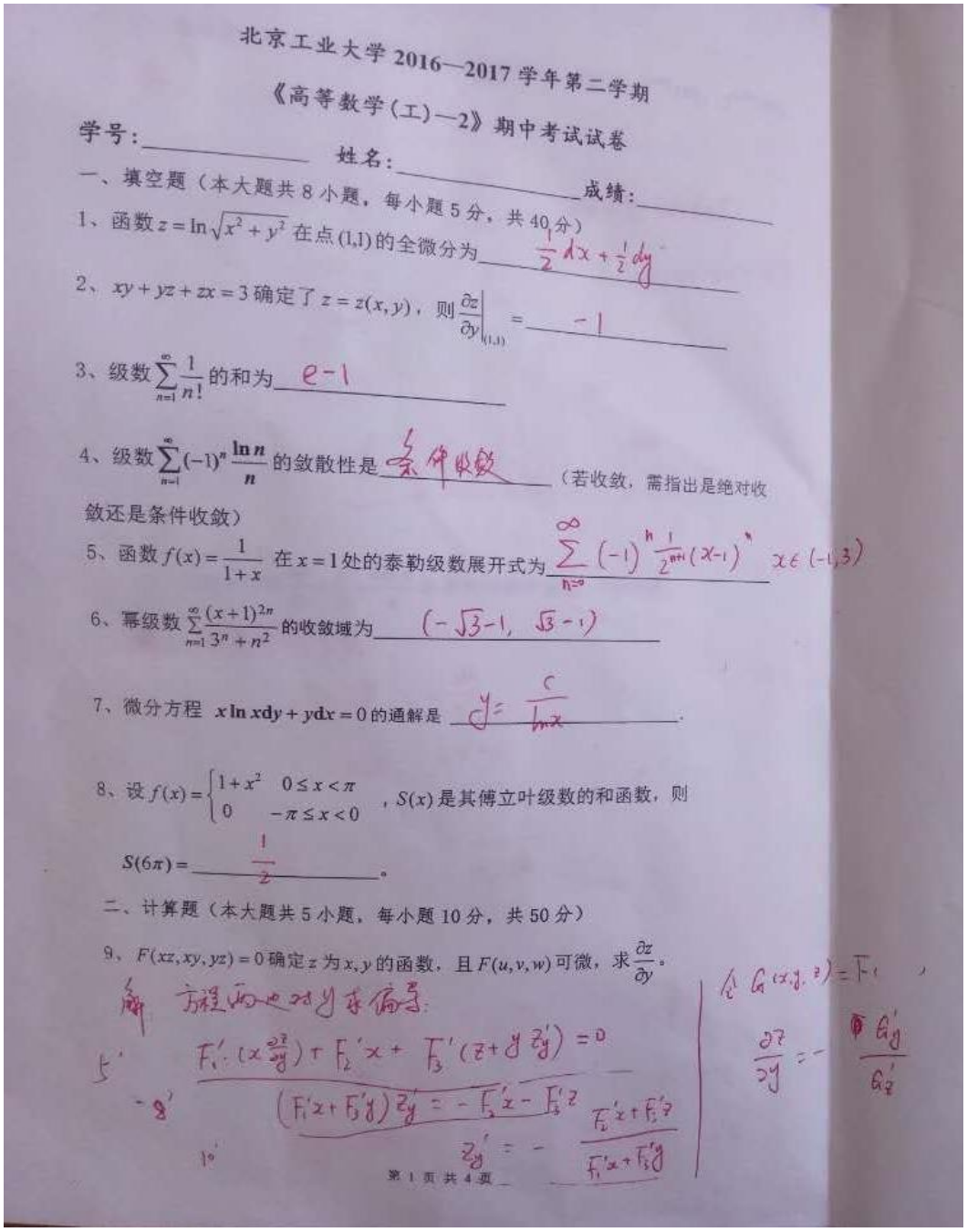
北工大 2016-2017 学年度第二学期 高数期中考试 真题



北京工业大学 2016—2017 学年第二学期

《高等数学(工)—2》期中考试试卷

学号:_____ 姓名:_____ 成绩:_____

一、填空题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分)

1、函数 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 在点(1,1)的全微分为 $\frac{1}{2}dx+\frac{1}{2}dy$

2、$xy+yz+zx=3$ 确定了 $z=z(x,y)$,则 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=$ -1

3、级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 的和为 $e-1$

4、级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ 的敛散性是 条件收敛 (若收敛,需指出是绝对收敛还是条件收敛)

5、函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 在 $x=1$ 处的泰勒级数展开式为 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}(x-1)^n$ $x\in(-1,3)$

6、幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{2n}}{3^n+n^2}$ 的收敛域为 $(-\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}-1)$

7、微分方程 $x\ln x dy+y dx=0$ 的通解是 $y=\frac{C}{\ln x}$.

8、设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2 & 0\le x<\pi\\ 0 & -\pi\le x<0\end{cases}$,$S(x)$ 是其傅立叶级数的和函数,则 $S(6\pi)=$ $\frac{1}{2}$。

二、计算题(本大题共 5 小题,每小题 10 分,共 50 分)

9、$F(xz,xy,yz)=0$ 确定 z 为 x,y 的函数,且 $F(u,v,w)$ 可微,求 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

解 方程两边对 y 求偏导:

$F_1'\cdot(x\frac{\partial z}{\partial y})+F_2'x+F_3'(z+y\frac{\partial z}{\partial y})=0$

$(F_1'x+F_3'y)\frac{\partial z}{\partial y}=-F_2'x-F_3'z$

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_2'x+F_3'z}{F_1'x+F_3'y}$

令 $G(x,y,z)=F(\cdots)$

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{G_y'}{G_z'}$

10、求微分方程 $y''+2y'-3y=(x^2+1)e^{-3x}$ 的通解。

解：先求 $y''+2y'-3y=0$ 的通解

$r_1=-3,\ r_2=1,\ y=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}$ —5'

令方程的通解 $y^*=Q(x)e^{-3x}$ 代入得

$Q''-4Q'=x^2+1$ 3'

设 $Q'=ax^2+bx+c$ 则 $Q''=2ax+b$ 代入得

$a=-\frac{1}{4},\ b=-\frac{1}{8},\ c=-\frac{9}{32}$

所以 $Q'=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}x-\frac{9}{32}$

$Q=-\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{16}x^2-\frac{9}{32}x$ —2'

通解 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}-e^{-3x}\left(\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{16}x^2+\frac{9}{32}x\right)$

11、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}(x-2)^{2n}$ 的收敛域，并计算级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n}}$。

解：收敛域为 $[1,3]$ 3'

令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}(x-2)^{2n+1}$

$\int_0^x S(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$

则 $S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$ —3'

2'

$S(x)=\arctan x$

$S(\sqrt{2}/2)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

2'

所以 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)2^n}=\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

12、将函数 $f(x)=x^5\sin x$ 展开成麦克劳林级数，并计算 $f^{(100)}(0)$，$f^{(101)}(0)$.

解：$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ -3'

$x^5\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+6}}{(2n+1)!}$ 根据幂级数展开式

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ -3' $2n+6=100\Rightarrow n=47$

$\frac{f^{(100)}(0)}{100!}=(-1)^{47}\cdot\frac{1}{95!}$

$f^{(100)}(0)=-\frac{100!}{95!}$ 2' $f^{(101)}(0)=0$ 2'

13、求微分方程 $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}$ 满足初始条件 $y(\pi)=1$ 的特解。

解：先解齐次方程

$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$

$\ln y=-\ln x+c$

$y=\frac{c}{x}$ -5'

令 $y=c(x)/x$，代入得

$c'(x)=\sin x$

$c(x)=-\cos x+c$

所以通解为 $y=\frac{c-\cos x}{x}$ -3'

当 $x=\pi$ 时 $y(\pi)=\frac{c+1}{\pi}=1$，$c=\pi-1$

所以特解为 $y=\frac{\pi-1-\cos x}{x}$ -2'

三、证明题（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

14、设 $u(x,y)=f(x+y)+\int_0^{x-y} g(t)dt$，其中 f、g 二阶可导，证明：$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(x+y)+g(x-y)$ 2'

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(x+y)+g'(x-y)$ 1'

$\frac{\partial u}{\partial y}=f'(x+y)-g(x-y)$ 1'

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(x+y)+g'(x-y)$ 1'

□

15、已知函数 $f(x)\geq 0$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，证明：当常数 $\alpha>0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}f(\frac{1}{n})$ 收敛.

证：根据比较审敛法的极限形式 2'

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{\alpha}}f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^{\alpha+1}}}=\frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=0$ 3'

所以 $\sum\frac{1}{n^{\alpha}}f(\frac{1}{n})$ 与 $\sum\frac{1}{n^{\alpha+1}}$ 由比较性判别

收敛.