

2016-2017 年第 1 学期《高等代数-2》补考试卷

做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人：_____ 学号：_____ 班号：_____

注：本试卷共 四 大题，共 六 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表 (阅卷教师填写)

题号	一	二	三	四	总成绩
满分	24	24	25	27	
得分					

得 分

一、 填空题 (每空 4 分，共 24 分)

1) 设 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$ $\varepsilon_2 = (0, 1, 0)$ $\varepsilon_3 = (0, 0, 1)$ 及 $\eta_1 = (0, 0, 1)$ $\eta_2 = (0, 1, 1)$ $\eta_3 = (1, 1, 0)$ 是线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中两组基，则从第一组基到第二组基的过渡矩阵为 _____，向量 $\alpha = (1, 0, 1)$ 在第二组基下的坐标为 _____

2) 若把全体复数的集合 $\mathbb{C}$ 看成复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间，则它的维数是 1

3) 若线性变换 A 在基 ε_1 ε_2 ε_3 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，则它在基

$\varepsilon_2, \varepsilon_1, \varepsilon_3$ 下的矩阵为

4) 设矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, 则 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 =$ 4

乘积, 行列式值.
和: 对角线元素和.

5) 欧氏空间 $\mathbb{R}^2$ 中, 基 $\varepsilon_1 = (1, 0)$ $\varepsilon_2 = (0, 1)$ 的度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

得分

二、 判断题 (每题 3 分, 对的在括号里画 $\checkmark$, 错的画 $\times$)

($\checkmark$) 1、线性空间 V 的两个子空间 V_1 与 V_2 的和是直和的充要条件是 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ P262 推.

($\checkmark$) 2、数域 P 上两个有限维线性空间同构的充要条件是它们的维数相同 P371

($\checkmark$) 3、 V_1 与 V_2 是线性空间 V 的两个真子空间, 则 $V_1 \cup V_2 \neq V$

($\checkmark$) 4、有限维线性空间中的线性变换是单射是充要条件是它是满射 P305 推.

($\checkmark$) 5、线性变换在不同基下的矩阵是相似的 P288 推5.

($\checkmark$) 6、 n 阶矩阵 A 可对角化的充要条件是它有 n 个线性无关的特征向量 P379 推7

($\checkmark$) 7、正交向量组必线性无关

($\checkmark$) 8、一个 n 阶实矩阵 A 满足 $AA' = E$, 则 A 是正交矩阵 P370 推7.

得分

三、 计算题 (25 分)

1、已知 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 上的线性变换 $\sigma(X) = MX + XN$, 其中

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

求 σ 在基 $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

下的矩阵

练习册 p395 T18(1) 2、求正交线性替换化下列实二次型为标准型: (书 p384)

作业 p395 T18(2)

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

得分

四、证明题 (27 分)

1. 设 $\mathcal{A}$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 满足 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$,

证明: 1) $\forall \alpha \in \mathcal{A}V, \mathcal{A}\alpha = \alpha$

2) $V = \mathcal{A}V \oplus \mathcal{A}^{-1}(0)$, 即 V 是 $\mathcal{A}$ 的值域和核的直和

3) $\mathcal{A}$ 在 V 中某组基下的矩阵为对角阵 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

证明: (1) $\forall \alpha \in \mathcal{A}V$, 则 $\exists \beta \in V$, 使得 $\alpha = \mathcal{A}\beta$

$$\text{则 } \mathcal{A}\alpha = \mathcal{A}(\mathcal{A}\beta) = \mathcal{A}^2\beta = \mathcal{A}\beta = \alpha$$

$$\therefore \mathcal{A}\alpha = \alpha$$

(2) $\forall \alpha \in \mathcal{A}V$. 由 (1) 知 $\mathcal{A}\alpha = \alpha$

若 $\alpha \in \mathcal{A}^{-1}(0)$, 则 $\mathcal{A}\alpha = 0, \therefore \alpha = 0$

$$\text{即 } \mathcal{A}V \cap \mathcal{A}^{-1}(0) = \{0\}$$

$\therefore \mathcal{A}V + \mathcal{A}^{-1}(0)$ 是直和.

$$\therefore \dim(\mathcal{A}V + \mathcal{A}^{-1}(0)) = \dim(\mathcal{A}V) + \dim(\mathcal{A}^{-1}(0)) = n$$

$$V = \mathcal{A}V \oplus \mathcal{A}^{-1}(0)$$

(3) 取 $\mathcal{A}V$ 的一组基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_r$. 由 (1) 知 $\mathcal{A}\epsilon_i = \epsilon_i, i=1, 2, \dots, r$.

取 $\mathcal{A}^{-1}(0)$ 的一组基 $\epsilon_{r+1}, \dots, \epsilon_n$. 则 $\mathcal{A}\epsilon_i = 0, i=r+1, \dots, n$

由 (2) 知 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_r, \epsilon_{r+1}, \dots, \epsilon_n$ 是 V 的一组基.

在此基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2、证明：正交的向量组必线性无关

3、设 V 是 n 维欧氏空间， W 是 V 的线性子空间，试证：

$$W^\perp = \{\alpha \in V : (\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in W\}$$

① 先证 $W^\perp \subset \{\alpha \in V : (\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in W\}$

已知 $W^\perp$ 是 W 的正交补

$$\therefore W^\perp \perp W, \text{ 且 } W^\perp + W = V$$

$$\therefore \text{有 } \forall \alpha \in W^\perp, \forall \beta \in W, \text{ 恒有 } (\alpha, \beta) = 0$$

$$\therefore W^\perp \subset \{\alpha \in V : (\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in W\}$$

② 再证 $\{\alpha \in V : (\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in W\} \subset W^\perp$

$$\text{令 } W_1 = \{\alpha \in V : (\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in W\}$$

$$\forall \alpha \in W_1 \subset V = W + W^\perp$$

$$\alpha = \beta + \gamma, \beta \in W, \gamma \in W^\perp$$

$$\text{由 } W_1 \text{ 知 } (\alpha, \beta) = 0$$

$$(\alpha, \beta) = (\beta + \gamma, \beta) = (\beta, \beta) + (\gamma, \beta) = 0$$

$$\text{已知 } (\gamma, \beta) = 0 \therefore (\beta, \beta) = 0, \beta = 0$$

$$\text{即 } \alpha = \gamma \in W^\perp \therefore W_1 \subset W^\perp$$

p260. 例7

书p300. 题1

p304. 定理11