

北京工业大学 2018 ——2019 学年第二学期期末

《高等数学(管)-2》考试试卷 (模拟)

承诺：本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人：____ **学号：**____ **班号：** 标答 _____

.....

注：本试卷共 三 大题，21 小题，共 4 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸（可以撕下）。

卷面成绩汇总表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三	总成绩
得分				

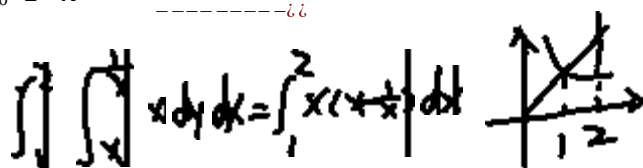
得分

一. 填空题（共 15 小题，每题 3 分，总分 45 分）

1. 设 $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$, 其中 f 可微, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'_1 + ye^{xy}f'_2$ _____

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$ _____

3. $D: y = x, y = \frac{1}{x}, x = 2$, 则 $\int_D f d\sigma = \frac{4}{3}$ _____



$$-\cos \theta \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

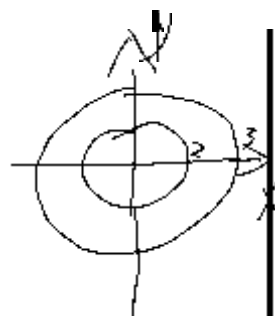
得分

二. 计算题 (共 5 题, 每题 10 分, 总分 50 分)

16. 计算二重积分 $\int_D \sqrt{9-x^2-y^2} d\sigma$ 其中 D 由 $x^2+y^2=4$ 及 $x^2+y^2=9$ 围成

解: 设 $\begin{cases} x=r \cos \theta \\ y=r \sin \theta \end{cases}$ $\int_D \sqrt{9-x^2-y^2} d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^3 \sqrt{9-r^2} r dr = \frac{10}{3} \pi \sqrt{5}$

(画图)



17. 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$ 的全部解

解: 特征方程为 $r^2 - 3r + 2 = 0$ 解得特征值为 $r_1 = 1, r_2 = 2$ 故对应的齐次方程得通解为:

$\bar{y} = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$. 又因为 $\lambda = 2 = r_2$, 故设非齐次得特解为 $y^* = (ax + b)e^{2x}$

则 $(y^*)' = ae^{2x} + 2(ax + b)e^{2x} = ae^{2x} + 2axe^{2x} + 2be^{2x}$,

$(y^*)'' = 2ae^{2x} + 2ae^{2x} + 4axe^{2x} + 4be^{2x}$, 代入原方程, 得 $a = 1, b = 0$ (b 可任意, 故取

0)

故原方程的全部解为: $y = \bar{y} + y^* = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + xe^{2x}$

18. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+1}$ 的和函数, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 的和

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = 1 \therefore R = 1$ 当 $x = \pm 1$ 时, 级数发散, 故收敛域为 $(-1, 1)$

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 设 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 两边积分, 得

$$\int s(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \Rightarrow s(x) = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n+1} = x \cdot s(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

故

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} s\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2$$

19. 计算 $\int_D f^2 dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$



解: (画图) $\int_D f^2 dx dy = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^a r^3 dr = \frac{a^4}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta$

$$= \frac{\pi}{4} a^4 + \frac{1}{16} a^4 \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta = \frac{\pi}{4} a^4$$

4. 法 II $\iint_D x^2 dx dy = \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$
 $= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \cdot r dr d\theta$
 $= \pi \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi}{4} a^4$

此题会改为二元复合函数的二阶偏导, 参考在第 1 小题基础上, 求二阶导。

20. 设 $\varphi(x)$ 可微, $\varphi(x) \cos x + 2 \int \varphi(t) \sin t dt = x + 1$, 求 $\varphi(x)$

两边对 x 求导, 得 $\varphi'(x) \cos x - \varphi(x) \sin x + 2\varphi(x) \sin x = 1$

$$\Rightarrow \varphi'(x) \cos x + \varphi(x) \sin x = 1 \Rightarrow \varphi'(x) + \tan x \varphi(x) = \frac{1}{\cos x}$$

这是关于 $\varphi(x)$ 的一阶线性方程, 由公式

$$\varphi(x) = \left(\int \frac{1}{\cos x} e^{\int \tan x dx} dx + C \right) e^{-\int \tan x dx} = (\tan x + C) \cos x$$

$$= \sin x + C \cos x$$

注意这种题是定值问题 (常微) 可以确定 $\varphi(0) = 1$

$$\therefore C = 1$$

$$\therefore \varphi(x) = \sin x + \cos x$$

得分

三. 证明题 (5 分)

21. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{+\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx = 0$

证：由积分中值定理 $\int_1^{+\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\sin \xi}{\xi} \cdot \frac{\pi}{4}$

当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\xi \rightarrow +\infty$ ，而 $\sin \xi$ 是有界变量，所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{+\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{4} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\sin \xi}{\xi} = 0$$

此题会改为数项级数部分的证明题，例如

已知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$ 收敛 or ……

证： $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - u_1$ ， $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$ 收敛

作业题

这是1212第3题。 ↑ 24第4题也看一下！