

北京工业大学 2019-2020 学年第二学期期末

线性代数(工) 课程试卷 (A)

考试方式: 闭卷

考试时间: 2020 年 7 月 2 日

学号_____ 姓名_____ 成绩_____

注: 本试卷共 8 大题, 满分 100 分.

得分登记 (由阅卷教师填写)

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八
得 分								

得 分

一. 填空题 (每小题 3 分, 共 30 分. 注意: 所有题目需给出计算结果;
 $a = a$ 型答案无效)

1. 5 阶行列式 $|a_{ij}|_{5 \times 5}$ 的完全展开式中, $a_{21}a_{32}a_{55}a_{43}a_{14}$ 前的正负号是 负号

2. 记 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & a^2 & 3 \\ 1 & 6 & a^4 & 9 \\ -1 & 7 & a^6 & 27 \end{vmatrix}$ 第二列四个位置的代数余子式分别是 $A_{12}, A_{22}, A_{32}, A_{42}$. 若

$A_{12} - 2A_{22} + 4A_{32} - 8A_{42} = 0$, 则 $a^2 =$ 3

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -6 & 7 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 8 & -1 \end{pmatrix}$. 齐次线性方程组 $AX = 0$ 的基础解系中含有解向量

的个数是 2

5. 若3阶方阵 A 和 B 的乘积 $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & -2 \\ -1 & 9 & 10 \end{pmatrix}$, 且 A 不可逆, 则 A 的伴随矩

阵 A^* 的秩 $R(A^*) = \underline{\quad 1 \quad}$

6. A 是2阶实方阵. 若齐次线性方程组 $(2A - E)X = 0$ 和 $(3A + 2E)X = 0$ 均有

非零解, 则行列式 $|3A^* + 2A^{-1} - E| = \underline{\quad -\frac{5}{2} \quad}$

7. 若 A 是2阶实方阵, α_1, α_2 是线性无关的2维实列向量, 满足 $A\alpha_1 = \alpha_1 + 4\alpha_2$,

$A\alpha_2 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$, 则 A 的正特征值是 5

8. 若3阶实方阵 $A = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ 的列向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 与线性无关向量组

$\{\beta_1, \beta_2\}$ 满足 $\begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 + 2\beta_2 \\ \alpha_2 = -\beta_1 + \beta_2 \\ \alpha_3 = \beta_1 - 5\beta_2 \end{cases}$, 则 A^* 的阶梯化矩阵中零行的行数是 2

9. 若 n 阶实方阵 A 满足 $A^5 = 0$, 则 $2A + 3E$ 的行列式 $|2A + 3E| = \underline{\quad 3^n \quad}$

10. 若实矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_3 & b_2 & c_1 & c_2 \\ a_4 & b_3 & c_2 & d \end{pmatrix}$ 满足 $A^7 - 3A^6 + 5A^5 - A^2 = 2E$, 则 A 的正

特征值的个数是 4

得分

二. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 8 & 21 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ (要求出具体数值).

得分

三. 用初等变换的方法, 解方程 $X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

得分

四. a 取何值时, 线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 + 18x_2 - 14x_3 + 10x_4 = a \end{cases}$ 有解?
有解时, 写出其通解.

得分

五. 已知 $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 5 \\ 5 & -1 & 5 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$. 求一个可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵; 并求出这一对角矩阵.

得分

六. 给定列向量组
 $\alpha_1 = (0, -1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (-1, 1, -1, 0)^T, \alpha_3 = (1, -1, 1, 2)^T,$
 $\alpha_4 = (2, -3, 3, 11)^T, \alpha_5 = (2, -3, 3, 3)^T.$

- 1 求该向量组的秩;
- 2 求该向量组的一个极大线性无关组;
- 3 把其余向量用问题 2 中求出的极大线性无关组线性表出.

得分

七. 证明: 如果 A 既是正交矩阵, 又是正定矩阵, 则 $|A|=1$.

证明: 记方阵 A 的阶数为 n , 其特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.
由于 A 是正交矩阵, 所以, $|A| = \pm 1$; (1)
由于 A 是正定矩阵, 所以,
 $\lambda_k > 0 \ (k=1, 2, \dots, n) \Rightarrow |A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n > 0.$ (2)
结合 (1)、(2) 可知, $|A|=1$.

得分

八. 用行列式定义证明,

$$\begin{vmatrix} -11 & 220 & -60 & 80 \\ 160 & 33 & 100 & -28 \\ 301 & 119 & -55 & -116 \\ 55 & 68 & 93 & 77 \end{vmatrix} \neq 0.$$

证明: 在行列式 $\begin{vmatrix} -11 & 220 & -60 & 80 \\ 160 & 33 & 100 & -28 \\ 301 & 119 & -55 & -116 \\ 55 & 68 & 93 & 77 \end{vmatrix}$ 的完全展开式中, 除了主

对角线上元素的乘积是奇数外, 其余乘积项皆为偶数, 这些偶数乘积项的代数和自然还是偶数。因此, 原行列式是一个奇数与一个偶数的代数和, 当然它不等于 0.