一、填空题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 微分方程 $xy'+2y=x^2$ 满足 $y(1)=\dfrac{1}{4}$ 的解为_____.

2. 设 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$，其周长为 a，则 $\oint_L (x^2+4y^2+3xy)\mathrm{d}s=$_____.

3. 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^z+xyz+x+\cos x=2$ 确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$_____.

4. 设 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^3+x^2y+3)\mathrm{d}S=$_____.

5. 若 $f(x)=\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}\ (-1\le x\le 1)$，则 $f^{(9)}(0)=$_____.

6. 曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面方程是_____.

7. 设 $f(x,y)=x^2+2y^2$，则该函数在点 $(0,1)$ 处的最大方向导数为_____.

8. 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin(n\pi+\dfrac{1}{\ln n})$ 是条件收敛、绝对收敛，还是发散？_____.

9. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_2^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$，则 $F'(1)=$_____.

10. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，$f(x)$ 在一个周期内的表达式为 $f(x)=\begin{cases}2, & -\pi<x<0\\ x^2, & 0\le x\le\pi\end{cases}$，其傅立叶级数的和函数记为 $S(x)$，则 $S(5)=$_____.

二、计算题（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

11. 求由曲面 $z=3-2x^2$ 与 $z=x^2+3y^2$ 所围成的封闭立体的体积.

12. 求函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在区域 $D=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+(y-1)^2\le 9\right\}$ 上的最大值和最小值.

13. 设曲面 Σ 为旋转抛物面 $z=x^2+y^2\ (0\le z\le 4)$ 的外侧，计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(4y+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-2yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

14. 求微分方程 $y''-3y'+2y=3x-2\mathrm{e}^x$ 的通解.

15. 计算 $\int_L(x^2+2xy)\mathrm{d}x+(x^2+y^4)\mathrm{d}y$，其中 L 为圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 上由点 $O(0,0)$ 到点 $B(1,1)$ 的一段曲线弧.

16. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-2)^n+1}{n2^n}x^n$ 的收敛域及和函数.

三、 证明题（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

17. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{a_n}}{n^p}\left(p>\dfrac{1}{2}\right)$ 也收敛.

18. 已知 $z=xyf\left(\dfrac{y}{x}\right)$，且 $f(u)$ 可导，若 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=y^2(\ln y-\ln x)$，证明：$f(1)=0$，$f'(1)=\dfrac{1}{2}$.