

2025-2026 年第 1 学期《算法设计与分析》期末考试

考试时间:2025 年 12 月 4 日 9:55 - 11:30

学号 _____ 姓名 _____

注意

1. 开卷考试，但不允许使用任何电子设备
2. 本试卷共 4 道题，满分 100 分，考试时答案请写在答题纸上。

1、某动物园开发了一套智能投喂系统，用于投喂金丝猴。系统每次投喂可以设置两种模式：

营养均衡模式：每次投喂 3 个特制营养棒

能量补充模式：每次投喂 4 个特制营养棒

要求使用这两种投喂模式，恰好投喂完 n ($n \geq 0$) 个营养棒的所有不同投喂序列数量（不同的投喂顺序视为不同的方案）。

实例说明：当 $n=11$ 个营养棒时，有以下 3 种投喂方案：

营养均衡(3) → 能量补充(4) → 能量补充(4)

能量补充(4) → 营养均衡(3) → 能量补充(4)

能量补充(4) → 能量补充(4) → 营养均衡(3)

请完成以下任务（提示：斐波那契数列）：

- (1) 请设计时间复杂度为 $O(n)$ 的算法，写出算法伪代码
- (2) 请分析时间复杂度为什么是 $O(n)$

2、用分治策略解决最佳游览路线问题

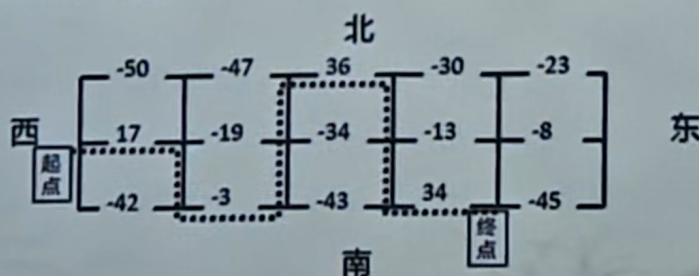
某旅游区的街道呈 3 行 n 列的网格状：

行方向：共 3 行，为东西向的旅游街，每行有 n 个评分（每列对应一个路口的评分）；旅游街为单行道，旅客只能从西向东走（即沿行的方向从左到右推进，只能从第 j 列 → 第 $j+1$ 列）

列方向：共 n 列，为南北向的林荫道，无评分；旅客在林荫道上可自由南北移动（即同一列内可任意选择行，从某行移动到另一行无代价）。

一个旅游者可以从任一路口开始浏览，在任一路口结束浏览。旅游者想寻找一条最佳的浏览路线，使得这条路线的所有评分值总和最大。

例如 $n=5$ 的街道：



即 $[-50, -47, 36, -30, -23]$, # 第 1 行
 $[17, -19, -34, -13, -8]$, # 第 2 行
 $[-42, -3, -43, 34, -45]$ # 第 3 行

最优路线: 第 1 列第 2 行 (17) $\rightarrow$ 第 2 列第 3 行 (-3) $\rightarrow$ 第 3 列第 1 行 (36) $\rightarrow$ 第 4 列第 3 行 (34), 最优路线评分总和为 $17-3+36+34=84$

- (1) 请用分治法设计算法求出最优路线评分总和, 且时间复杂度低于 $O(n^2)$ 。请写出算法伪代码, 需要在伪代码中标明分治的分解, 解决与合并步骤
- (2) 请进行时间复杂度分析, 需要写出时间复杂度的递推方程, 并给出最终时间复杂度以及求解过程

3、用动态规划策略解决问题, 天平平衡问题。

问题描述: 有 n 个砝码重量分别为 w_i ($0 \leq i \leq n$), 现在要把砝码全部放到一架简易托盘天平的左右两个托盘上, 问如何放砝码使得天平尽量平衡 (即左右两个托盘上砝码重量尽量接近)。提示: 问题可以转化为最大化一个托盘上的砝码重量和且该和需要小于所有砝码总重量的一半。

- (1) 这属于组合优化问题, 请用数学语言对上述问题加以形式化描述
- (2) 在 (1) 数学抽象基础上给出动态规划求解最优值的递推公式 (要求对所给公式中的符号意义加以详细说明)
- (3) 具体实例: 4 个砝码, 重量分别为 1, 1, 3, 5, 写出最优值自底向上计算表格, 请结合该实例简述如何根据动态规划的最优值表格得到最优解的过程
- (4) 给出利用 (2) 的递推公式用动态规划求解该问题得到最优值的时间复杂度

4、用分支限界法解决工作分配问题

某家庭周末要进行大扫除, 有 4 位家庭成员 (爸爸、妈妈、哥哥、妹妹) 需要完成 4 项清洁任务 (扫地、拖地、擦窗、整理)。每位家庭成员完成不同任务所需的时间不同, 如下表所示 (单位: 分钟):

成员\任务	T1扫地	T2拖地	T3擦窗	T4整理
M1爸爸	30	40	50	60
M2妈妈	10	20	30	40
M3哥哥	5	6	7	8
M4妹妹	6	5	8	7

每位家庭成员只能完成一项任务, 每项任务只能由一位成员完成, 找出使得总完成时间最短的任务分配方案。请使用优先队列式分支限界法解决问题, 要求:

- (1) 写出算法伪代码, 需要在伪代码中标明结点组织方式、限界函数计算方式、剪枝策略、最优解得到方式等关键部分
- (2) 画出解空间树 (仅需画出扩展的结点, 需要标明每个结点的限界函数值)